**4.1 多重仿射映射** 2020年9月16日09点40分

在本章中,我们将讨论多仿射映射表示的某些多项式映射.它以通常称为“开花”的形式应用于曲线和曲面设计，更具体地说是应用于Béezier曲线，样条曲线和de Casteljau算法。这种材料相当古老，最早可以追溯到1879年，并且很难获得。多项式极化的表示形式可以在1939年首次出现的Hermann Weyl的“古典群” [87]（第一章，第4-6页）中找到。极化的等效形式在Cartan [16]中进行了广泛的讨论（在向量空间之间的多项式映射的情况下，第一章第6节）以及对仿射情况的一些讨论可以在Berger [5]中找到（第3章，第3节）。应当指出的是，de Casteljau率先提出了以极形式表示多项式曲线和曲面的方法（请参阅de Casteljau [23]）。实际上，毫无疑问，极地方法导致他发现了被称为“ de Casteljau算法”的精美算法。

本章的内容如下。快速回顾了二项式和多项式系数后，便定义了多线性和多重仿射映射。接下来，我们证明引理2.7.2的一般化，用多线性映射表征多仿射映射。该结果本质上是相当技术性的，但是在10.1节中起着至关重要的作用。初读时可以省略该证明。定义了仿射多项式函数及其极形式。仿射多项式函数在E具有有限维的情况下被明确描述，表明它们包含了通常的多元多项式函数。定义了极坐标形式的多项式曲线，并根据控制点和伯恩斯坦多项式表示了它们的特征。接下来证明仿射多项式函数的极坐标形式的唯一性。它显示了如何对一个或多个变量的多项式进行极化，并建立了多项式与对称多仿射图之间的等价关系。通过得出结论，表明极坐标形式的多项式曲线的定义等同于更传统的定义（定义3.1.1），并且度≤m的伯恩斯坦多项式构成度≤m的多项式的向量空间的基础.

开篇第一部分内容回顾二项系数,这一部分内容已经在概率和统计详细介绍,这里略过.

对于任何,对于所有,以下等式成立:

证明是简单的归纳法.更一般而言,对于任何,我们有

同样,证明是归纳法.被称为多项式系数,其中,它们也表示为

现在,我们进行多重仿射映射.为了方便读者,我们回顾多重线性映射的定义.设和是上的向量空间,其中.

**定义4.1.1** 函数是一个多重线性映射(或m重线性映射),当且仅当每个参数相对于其它固定参数都是线性的.更明确地说,对于每一个,对于所有的,对于中的每个向量族,以及标量的每个族,

**定义4.1.2** 函数是一个多重仿射映射(或仿射映射),如果它在每个自变量中都是仿射的,即对于每个,对于所有,则映射是仿射映射,即,它保留重心组合.更明确地说,对于中每个点的族,对于每个标量的族使得,我们有

任意函数是对称的(其中E和F是任意集合,而不仅仅是矢量空间或仿射空间),当且仅当

对任意排列.

让我们尝试了解什么是多线性映射和多仿射映射,在简单的情况下,其中并且,是与相关联的仿射线.由于为维1,所以每个线性形式的形式必须为,对于某些.仿射形式的形式必须为. 双线性形式必须为

稍加思考,表明仿射形式必须为形式

下一个引理将表明,重仿射形式可以表示为个k重线性形式的总和,其中,再加上一个常数.因此,我们看到多线性形式和多仿射形式之间的主要区别在于,多线性形式在它们的论点上是齐次的,而多仿射形式不是,而是它们是齐次形式的和.重仿射形式的一个很好的例子是基本对称函数.给定个变量,对于每个,我们定义第个基本对称函数,简称,如下所示:

表示的简洁方法如下:

注意包含个形式为项的和.因此

为了理解下一个引理的证明来自何处,让我们考虑一个仿射映射的特殊情况,其中是一个向量空间.因为是双仿射,注意到

在上是线性的,但是在上是仿射,且在上的差值同样如此.但是,我们有

其中在上是线性的.因此,我们有

即

由于

其中和在上都是线性的,在和上都是线性的,则是双线性的.但是在上是线性的,在上是线性的,因此我们可以写作

其中是双线性的,和是线性的.的唯一性很明显,因此,和的唯一性很容易遵循.

**引理4.1.3** 对于每一个重仿射映射,有个唯一的多重线性映射,使得

对所有的和所有的成立.

**引理4.1.4** 对于每个对称重仿射映射,有个唯一的对称多线性映射,使得

对所有的和所有的成立.

**4.2 仿射多项式和极形式** 2020年9月16日14点34分

对称仿射图的美丽和实用性在于以下事实:这些映射可用于定义从任意维度的仿射(向量)空间E到任意维度的仿射(向量)空间F的多项式函数的概念.在和的特殊情况下,该概念实际上等效于n个变量中由多项式引起的多项式函数的概念.额外的好处是,我们实现了“多重线性化”,并且可以以非常优雅和方便的方式定义(参数化的)“多项式曲线”.这种方法有时称为“开花”（Ramshaw引入的一个术语,他是第一个在曲线和曲面表示的上下文中引入该术语的人）,还可以优雅而有效地展示CAGD中使用的主要算法,特别是花键.

**定义4.2.1** 给定两个仿射空间和: (该定义比较重要,要仔细理解)

(1)**极度为的仿射多项式函数**(或简称为极度为的仿射多项式)是一个映射，因此存在一些对称的仿射映射,称为的极形式,

对所有的成立.

(2)**次数为的齐次多项式函数**是映射,从而存在一些非零对称线性映射,称为的极性形式,其中

对所有的成立.

(3)**极度为的多项式函数**是一个映射,从而有个对称的线性映射,并且对某些,其中

对所有的成立.

定义4.2.1中给出的度为的齐次多项式函数的定义是Cartan[16]给出的定义.定义4.2.1中给出的极数的多项式函数的定义几乎是Cartan[16]给出的，不同之处在于我们允许任何多线性映射都为零,而Cartan不允许.因此,我们没有定义次数完全为的多项式映射（就像Cartan所做的那样）,而是定义了次数最多为的多项式映射.

这里给出了一些示例帮助理解定理4.2.1.

我们采用多项式函数的定义(极性度为),因为它在算法上更方便,并且使与多仿射极坐标形式的对应关系更好。 从术语的角度来看，尽管度数令人困惑（从代数几何学的角度来看是错误的），但经常不得不说“极度”而不是度数是很麻烦的。 尽管如此，我们通常会允许我们自己对这种语言的滥用，这已经得到了充分的警告.

**引理4.2.2** 给定有限维的任意向量空间,任意向量空间,的任意基向量,任意对称多重线性映射,任意向量

我们有

对任意成立, 与相关的齐次多项式函数h由下式给出

证明过程和之后的一段讨论需要注意.

**引理4.2.3** 给定有限维的任意仿射空间,任意仿射空间,的任意基向量,任意对称多重仿射映射,任意向量

对于E中的任意点,我们有

对某些和某些, 与相关的仿射多项式函数由下式给出

其中,.

定义4.2.4 极度为m的极坐标形式的（参数化）多项式曲线是极度为m的仿射多项式图F：A→E，由它的m极形式定义，它是一些对称的m仿射像度f：Am→E，其中 A是真实的仿射线，E是任何仿射空间（尺寸至少为2）。 给定任何r，s∈A，且r <s，处于极数形式为m的（参数化）多项式曲线段F（[r，s]）是约束F：[r，s]→E的一个仿射多项式 曲线F：A→E，极性为度m。 我们将F的迹线定义为F（A），将F [r，s]的迹线定义为F（[r，s]）.

**4.3 多项式(贝塞尔)曲线和控制点** 2020年9月18日09点50分

在第3.1节中,我们考虑了对称双仿射函数和对称三仿射函数的情况,我们看到了一个模式出现.现在让我们考虑对称重仿射映射的一般情况,其中是任何仿射空间.让我们在中选择一个仿射基,其中,然后计算

由于是对称且m仿射的,通过简单的归纳,我们得到

并且由于,我们得到

的系数

显然是对称m仿射映射函数,这些函数加起来为1,因为通过展开乘积可以轻松地对其进行验证

因此,我们表明,每个对称的m-仿射图完全由个点序列确定

其中是的元素.

反过来,给定个点的任何序列,映射

是对称m仿射,并且我们有

点被称为控制点,或贝塞尔控制点,正如我们已经说过几次,它们在de Casteljau算法及其扩展中起着重要作用.

与相关的多项式函数由h（t）= f（t，...，t）给出,即

多项式

是[r,s]上度为m的伯恩斯坦多项式.这些多项式构成唯一的分割:

对于和，由于,因此进行了一些简化,并且与相关的多项式函数由下式给出:

多项式

是[0,1]上度为m的伯恩斯坦多项式.不难证明它们构成了度的多项式向量空间的基.显然,我们有

**引理4.3.1** 在某个仿射空间中,给定个点的任何序列,存在一个唯一的极度为m的多项式曲线,其极形式满足条件

其中是的元素.此外,F的极形式f由下面的公式给出

并且F(t)的公式为

其中多项式

是[r,s]上度为m的伯恩斯坦多项式,并且是点序列的重心[baycenter]坐标.

**4.4 仿射多项式极形式的唯一性** 2020年9月17日09点55分

**引理4.4.1** 给定两个仿射空间和,对于次数为的任意多项式函数,其极坐标形式都是唯一的,并由以下表达式给出:

**4.5 多变量极化多项式** 2020年9月17日10点18分

**引理4.5.1**

(1)对于每一个次数小于等于的多项式,存在对称的重仿射形式,使得对所有成立.如果是次数为的齐次多项式,则对称仿射形式是多线性的.

(2)对于每一个次数小于等于的多项式,存在对称的重仿射形式,使得对所有成立.如果是次数为的齐次多项式,则是对称的多线性映射.

**证明**: (1)对于的单项式,足以证明这一点.显然,

是一个对称的m仿射形式满足该引理(其中是第个初等对称函数,包含项),且当时,我们得到多重线性映射.

(2) 当且时,足以证明形式为的其次单项式.令定义如下

当时,对应于曲面的情况,我们可以给出一个更易于理解的表达式.写出和,以最小化下标的数量,给定单项式,且,我们得到

**引理4.5.2** 在总次数的多项式与对称的m-仿射映射之间存在等价,如下所示:

1. 如果是一个对称的m-仿射映射,则函数使得

对所有成立,p是一个多项式(函数)对应于唯一的总次数的多项式.

(2)对于每一个总次数的多项式,存在一个唯一的对称m-仿射映射,使得

对所有成立.

此外,当是一个总次数恰好为m的其次多项式,则f是一个对称多线性映射.反过来也如此.

后面的一段内容介绍贝塞尔曲线的系数任然是一组基函数，值得一看

本章的习题全部都是证明题，比较重要，值得思考。